Microeconomia

Função de Custos: Fixo, Variável, Médio e Marginal

ISCAL - IPL

Função de Custos

Objectivo: Derivar e interpretar as componentes da função de custos a curto prazo — fixo, variável, médio e marginal — e compreender as suas relações geométricas e analíticas.

Do Processo Produtivo aos Custos

O objectivo da empresa é maximizar o lucro:

$$\Pi = \text{Receitas Totais} - \text{Custos Totais}$$

Para isso, é necessário conhecer a função de custos: como variam os custos com o nível de produção Q.

A curto prazo, com K fixo e L variável, os custos dividem-se em duas componentes muito distintas.

Custo Fixo e Custo Variável

$$CT = C(Q) = CF + CV(Q)$$

- **Custo Fixo (CF):** não depende da quantidade produzida — é o custo dos fatores fixos (K). Existe mesmo que $Q = 0$.
- **Custo Variável (CV):** depende da quantidade produzida — é o custo do trabalho contratado ($W \times L$). Aumenta com Q.

$CV(0) = 0$ — se não se produz nada, não se contrata trabalho. Mas $CF > 0$ mesmo com $Q = 0$.

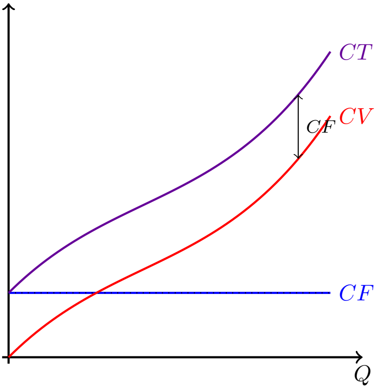
Exemplo: Da Função de Produção à Função de Custos

Dados: custo de K instalado $= 60$; salário por unidade de $L = 250$

L	Q	CF	CV	CT
0	0	60	0	60
1	20	60	250	310
2	50	60	500	560
3	85	60	750	810
4	114	60	1 000	1 060
5	140	60	1 250	1 310
6	159	60	1 500	1 560
7	169	60	1 750	1 810
8	164	60	2 000	2 060

Note que a curva de CT é paralela à de CV — distam sempre $CF = 60$.

Gráfico: CT, CV e CF



Custo Marginal

É a variação do custo total quando se produz **uma unidade adicional** de output:

$$Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{dCT}{dQ}$$

Como CF é constante, $\Delta CF = 0$, portanto:

$$Cmg = \frac{\Delta CV}{\Delta Q} = \frac{dCV}{dQ}$$

> O custo marginal é **independente do custo fixo** — pode calcular-se a partir de CT ou de CV com o mesmo resultado.

Custo Marginal e MPL

Existe uma relação inversa entre Cmg e MPL. Se o salário por unidade de L é W:

$$Cmg = \frac{W}{MPL}$$

- Na Etapa I (MPL crescente) $\rightarrow Cmg$ é **decrescente**
- No óptimo técnico (APL máximo) $\rightarrow Cmg = CVM$ (mínimo de CVM)
- Na Etapa II (MPL decrescente, $MPL > 0$) $\rightarrow Cmg$ é **crescente**

A Lei dos Rendimentos Marginais Decrescentes implica que o Cmg é crescente na Zona Económica de Exploração — **fundamento da Lei da Oferta**.

Custos Médios

Dividem o custo por unidade produzida:

- **Custo Fixo Médio:** $CFM = \dfrac{CF}{Q}$ — sempre decrescente (o custo fixo dilui-se por mais unidades)
- **Custo Variável Médio:** $CVM = \dfrac{CV}{Q}$ — forma em U; mínimo onde $Cmg = CVM$
- **Custo Total Médio:** $CTM = \dfrac{CT}{Q} = CFM + CVM$ — forma em U; mínimo onde $Cmg = CTM$

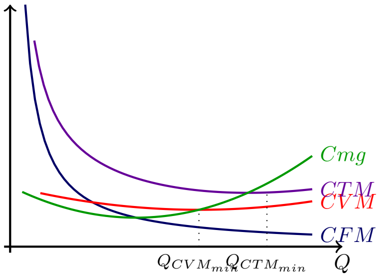
$$CTM = CFM + CVM \implies CTM > CVM \text{ sempre}$$

Tabela com Todos os Custos

L	Q	CT	Cmg	CVM	CTM	Etapa
0	0	60	—	—	—	
1	20	310	**12.50**	12.50	15.50	I
2	50	560	**8.33**	10.00	11.20	I
3	85	810	**7.14**	8.82	9.53	I
4	114	1 060	**8.62**	***8.77***	9.30	I
5	140	1 310	9.62	8.93	9.36	**II**
6	159	1 560	13.16	9.43	9.81	**II**
7	169	1 810	25.00	10.36	10.71	**II**

- Amarelo: Cmg decrescente (Etapa I)
- Verde: CVM próximo do mínimo (onde $Cmg \approx CVM$)
- CTM está sempre acima de CVM (diferença $= CFM$)

Geometria dos Custos Médios e Marginal



Propriedades Fundamentais

1. Cmg intersecta CVM no **mínimo de** CVM

- Se $Cmg < CVM$: o custo da última unidade é inferior à média $\rightarrow CVM$ desce
- Se $Cmg > CVM$: o custo da última unidade é superior à média $\rightarrow CVM$ sobe
- Se $Cmg = CVM$: estamos no mínimo de CVM

2. Cmg intersecta CTM no **mínimo de** CTM (pelo mesmo raciocínio)

3. $CTM > CVM$ sempre (a diferença é o $CFM > 0$)

4. CFM é sempre decrescente e tende para 0 $\rightarrow CTM$ converge para CVM quando $Q \rightarrow \infty$

Exemplo Analítico Completo

Dada $CT = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10$:

$$CF = 10 \quad \text{(termo constante)}$$
$$CV = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$$

$$Cmg = \frac{dCT}{dQ} = 3Q^2 - 12Q + 15$$

$$CVM = \frac{CV}{Q} = Q^2 - 6Q + 15$$
$$CTM = \frac{CT}{Q} = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{10}{Q}$$

Mínimo de CVM e CTM

Para $CT = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10$:

Mínimo de CVM: onde $Cmg = CVM$:

$$3Q^2 - 12Q + 15 = Q^2 - 6Q + 15$$

$$2Q^2 - 6Q = 0 \implies Q(2Q - 6) = 0 \implies Q_{CVM_{min}} = 3$$

Mínimo de CTM: onde $Cmg = CTM$, ou $\frac{dCTM}{dQ} = 0$:

$$\frac{dCTM}{dQ} = 2Q - 6 - \frac{10}{Q^2} = 0$$

Numericamente: $Q_{CTM_{min}} \approx 3.47$; $CTM_{min} \approx 9.10$

Exercícios — Escolha Múltipla (1)

1. Para a função $CT = 2Q^2 + 8Q + 50$, qual é o Custo Marginal?

a) $Cmg = 2Q^2 + 8Q$
b) $Cmg = 4Q + 8$
c) $Cmg = 2Q + 8$
d) $Cmg = 4Q$

Solução: B $Cmg = \frac{dCT}{dQ} = 4Q + 8$.

Exercícios — Escolha Múltipla (2)

2. Para qual das seguintes afirmações sobre custos a curto prazo a afirmação é **falsa**?

a) O CFM é sempre decrescente com Q.
b) O Cmg intersecta o CVM no mínimo do CVM.
c) O CTM intersecta o CVM no mínimo do CVM.
d) O Cmg é independente do custo fixo.

Solução: C A afirmação **c)** é falsa. Quem intersecta CVM no mínimo é o Cmg, não o CTM. O CTM é sempre maior que o CVM e intersecta o Cmg no **seu próprio mínimo**.

Exercício de Desenvolvimento

Enunciado: Uma empresa tem a função de custos totais $CT = Q^3 - 9Q^2 + 30Q + 18$.

a) Identifique CF, $CV(Q)$, $CVM(Q)$, $CTM(Q)$ e $Cmg(Q)$.

b) Determine a produção no mínimo de CVM e o respectivo valor mínimo. Confirme que $Cmg = CVM$ nesse ponto.

c) Determine a produção no mínimo de CTM. Confirme que $Cmg = CTM$ nesse ponto.

Solução — Desenvolvimento (a)

$$CT = Q^3 - 9Q^2 + 30Q + 18$$

$$CF = 18 \qquad CV = Q^3 - 9Q^2 + 30Q$$

$$Cmg = 3Q^2 - 18Q + 30$$

$$CVM = \frac{CV}{Q} = Q^2 - 9Q + 30$$

$$CTM = \frac{CT}{Q} = Q^2 - 9Q + 30 + \frac{18}{Q}$$

Solução — Desenvolvimento (b) e (c)

Mínimo de CVM ($Cmg = CVM$):

$$3Q^2 - 18Q + 30 = Q^2 - 9Q + 30$$

$$2Q^2 - 9Q = 0 \implies Q(2Q - 9) = 0 \implies Q_{CVM_{min}} = 4.5$$

$CVM(4.5) = 20.25 - 40.5 + 30 = 9.75$

$Cmg(4.5) = 3(20.25) - 18(4.5) + 30 = 60.75 - 81 + 30 = 9.75$

Mínimo de CTM ($Cmg = CTM$, ou $\frac{dCTM}{dQ} = 0$):

$$\frac{dCTM}{dQ} = 2Q - 9 - \frac{18}{Q^2} = 0 \implies 2Q^3 - 9Q^2 - 18 = 0$$

Numericamente: $Q_{CTM_{min}} \approx 4.87$; $CTM(4.87) \approx 13.59$; $Cmg(4.87) \approx 13.50$