Microeconomia

Geometria dos Custos

ISCAL - IPL

Geometria dos Custos

Objectivo: Compreender as relações geométricas entre as curvas de custo — como os declives e os raios de origem das curvas de CT e CV se relacionam com Cmg, CVM e CTM — e sistematizar as correspondências entre produção e custos.

Ponte entre Produção e Custos

Já estabelecemos duas relações fundamentais:

$$Cmg = \frac{w}{MPL} \qquad CVM = \frac{w}{APL}$$

Isto implica uma **simetria total** entre as curvas de produto e as curvas de custo:

Produção		Custo
MPL crescente	$\Rightarrow$	Cmg decrescente
MPL máximo	$\Rightarrow$	Cmg mínimo
MPL decrescente	$\Rightarrow$	Cmg crescente
APL máximo (óptimo técnico)	$\Rightarrow$	CVM mínimo

Derivação das Relações

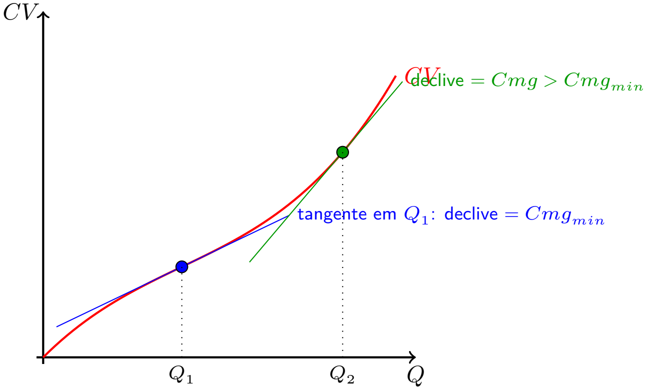
$$Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{\Delta CV}{\Delta Q} = \frac{\Delta CV}{\Delta L} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta Q} = \frac{w}{MPL}$$

$$CVM = \frac{CV}{Q} = \frac{wL}{Q} = \frac{w}{(Q/L)} = \frac{w}{APL}$$

A geometria das curvas de custo é um **espelho invertido** da geometria das curvas de produto: onde o produto tem máximo, o custo tem mínimo — e vice-versa.

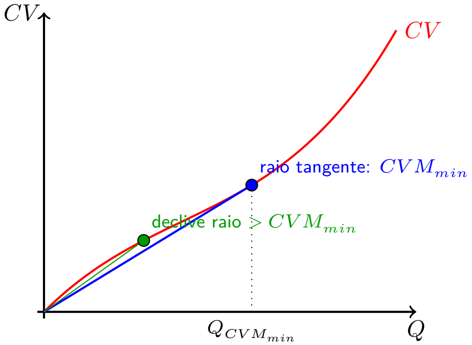
Cmg é o Declive da Tangente a CV

Cmg num dado ponto é o **declive da recta tangente** à curva CV nesse ponto:



CVM é o Declive do Raio de Origem a CV

$CVM(Q) = CV(Q)/Q$ é o **declive do segmento** que une a origem ao ponto (Q, CV):



O mínimo de CVM ocorre onde o **raio de origem é tangente** à curva CV. Nesse ponto, raio e tangente coincidem $\Rightarrow$ $Cmg = CVM$.

CTM é o Declive do Raio de Origem a CT

Analogamente, $CTM(Q) = CT(Q)/Q$ é o **declive do raio de origem** à curva CT:

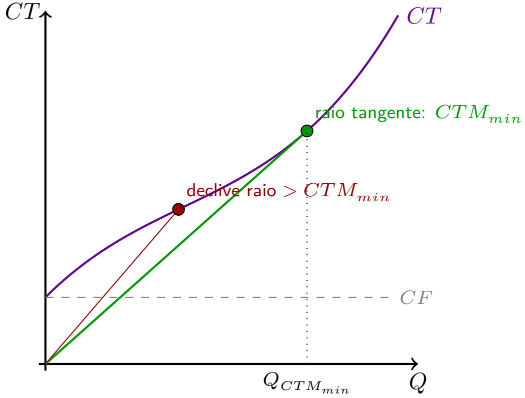
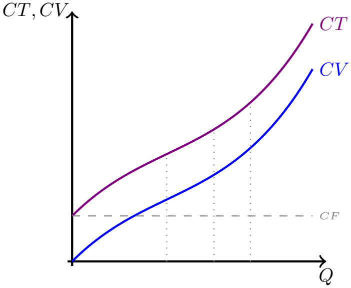
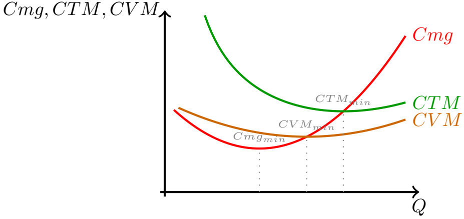


Diagrama Duplo: CT/CV acima, Custos Médios abaixo





4 Correspondências Fundamentais

1. MPL **máximo** $\Leftrightarrow$ Cmg **mínimo —** ponto de inflexão em ambas as curvas
2. APL **máximo** (óptimo técnico) $\Leftrightarrow$ CVM **mínimo**
3. Cmg intersecta CVM no **mínimo de** CVM $(Cmg = CVM)$
4. Cmg intersecta CTM no **mínimo de** CTM $(Cmg = CTM)$, e $Q_{CTM_{min}} > Q_{CVM_{min}}$ sempre

Porquê Cmg intersecta CVM no mínimo?

Raciocínio pela média:

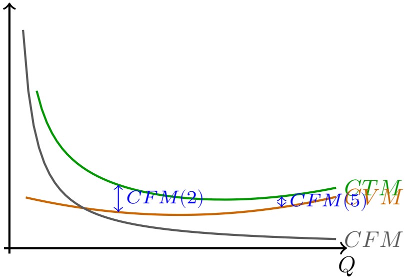
- $Cmg < CVM$: a última unidade custa **menos** que a média $\Rightarrow$ média **desce**
- $Cmg > CVM$: a última unidade custa **mais** que a média $\Rightarrow$ média **sobe**
- $Cmg = CVM$: a média está no seu **ponto de viragem** $\Rightarrow$ mínimo

Analogia: numa série de notas de teste, se a nota seguinte for abaixo da média actual, a média desce; se for acima, sobe. A nota que iguala a média é indiferente — é o ponto de mínimo (ou máximo) da média.

CFM, CVM e CTM quando Q $\to \infty$

$$CTM = CFM + CVM = \frac{CF}{Q} + CVM$$

Quando $Q \to +\infty$: $CFM \to 0$ e portanto $CTM \to CVM$.



Exercícios — Escolha Múltipla (1)

1. Para a função $CT = Q^3 - 12Q^2 + 60Q + 20$, o mínimo do Custo Marginal ocorre em:

a) $Q = 3$
b) $Q = 4$
c) $Q = 6$
d) $Q = 12$

Solução: $Cmg = 3Q^2 - 24Q + 60$.

Mínimo: $dCmg/dQ = 6Q - 24 = 0 \Rightarrow Q = 4$.

$Cmg(4) = 48 - 96 + 60 = 12$.

Condição de 2.ª ordem: $d^2Cmg/dQ^2 = 6 > 0 \rightarrow$ mínimo

Exercícios — Escolha Múltipla (2)

2. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

a) O CTM intersecta o CVM no mínimo do CVM.
b) O mínimo de CTM ocorre sempre para Q menor do que o mínimo de CVM.
c) **O CFM é sempre decrescente e tende para zero quando Q aumenta.**
d) O Cmg é sempre crescente.

Solução:

- a) Falsa — é o Cmg que intersecta CVM no seu mínimo.
- b) Falsa — o mínimo de CTM ocorre para Q **maior** que o de CVM.
- **c) Verdadeira** — $CFM = CF/Q$ é decrescente em Q; $\lim_{Q\to\infty} CFM = 0$.
- d) Falsa — Cmg decresce na Etapa I e cresce na Etapa II.

Exercício de Desenvolvimento

Enunciado: Seja $CT = \frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 30Q + 48$.

a) Identifique CF, CV, Cmg, CVM e CTM.

b) Encontre o mínimo de Cmg e o mínimo de CVM. Confirme que $Cmg = CVM$ no mínimo de CVM.

c) Verifique que o mínimo de CTM ocorre para um valor de Q superior ao mínimo de CVM.

Solução — Desenvolvimento (a) e (b)

$$CF = 48, \qquad CV = \tfrac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 30Q$$

$$Cmg = Q^2 - 10Q + 30, \quad CVM = \tfrac{1}{3}Q^2 - 5Q + 30, \quad CTM = \tfrac{1}{3}Q^2 - 5Q$$

Mínimo de Cmg: $dCmg/dQ = 2Q - 10 = 0 \;\Rightarrow\; Q = 5$;
$Cmg(5) = 25 - 50 + 30 = 5$

Mínimo de CVM — igualar $Cmg = CVM$:

$$Q^2 - 10Q + 30 = \tfrac{1}{3}Q^2 - 5Q + 30 \;\Rightarrow\; \tfrac{2}{3}Q^2 - 5Q = 0 \;\Rightarrow\; Q\left(\tfrac{2}{3}Q - 5\right) = 0$$

$CVM(7.5) = \frac{1}{3}(56.25) - 37.5 + 30 = 18.75 - 37.5 + 30 = 11.25$

$Cmg(7.5) = 56.25 - 75 + 30 = 11.25$

Solução — Desenvolvimento (c)

Mínimo de CTM: $dCTM/dQ = 0$:

$$\frac{2}{3}Q - 5 - \frac{48}{Q^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}Q^3 - 5Q^2 - 48 = 0$$

Por tentativas:

$Q = 8$: $\frac{2}{3}(512) - 5(64) - 48 = 341.3 - 320 - 48 = -26.7 < 0$

$Q = 8.5$:
$\frac{2}{3}(614.1) - 5(72.25) - 48 = 409.4 - 361.3 - 48 \approx 0.1 \approx 0$

$\Rightarrow Q_{CTM_{min}} \approx 8.5$

$CTM(8.5) = \frac{1}{3}(72.25) - 42.5 + 30 + \frac{48}{8.5} \approx$
$24.08 - 42.5 + 30 + 5.65 \approx 17.23$

$Cmg(8.5) = 72.25 - 85 + 30 = 17.25$

Conclusão: $Q_{CTM_{min}} \approx 8.5 > Q_{CVM_{min}} = 7.5$